Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

+ Tập xác định: $x \neq -\frac{3}{2}$

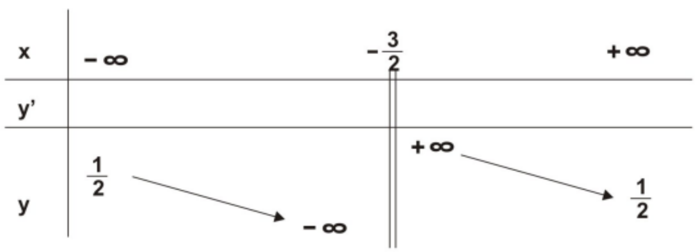
+ y’ = $\frac{-1}{(2x+3)^2} < 0 \; \forall x \neq -\frac{3}{2}$

+ Tiệm cận

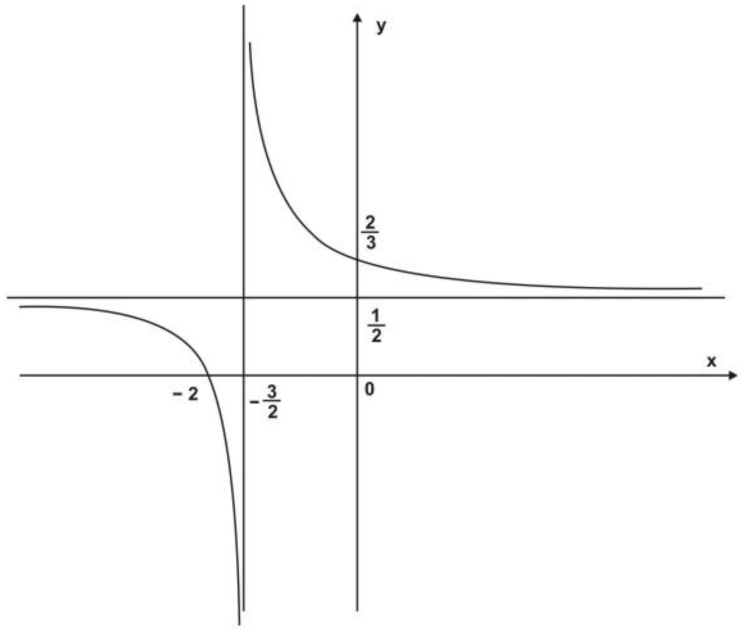
Vì $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{1}{2}$ nên tiệm cận ngang là y = $\frac{1}{2}$

Vì $\lim\limits_{x\to -\left(\frac{3}{2}\right)^{+}} \frac{x+2}{2x+3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to -\left(\frac{3}{2}\right)^{-}} \frac{x+2}{2x+3} = -\infty$ nên tiệm cận đứng là x = - $\frac{3}{2}$

Bảng biến thiên:



Vẽ đồ thị: đồ thị cắt Oy tại $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ và cắt Ox tại (-2; 0)



2. Ta có $y'=\dfrac{-1}{(2x+3)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến tại $x=x_0$ (với $x_0\neq-\dfrac{3}{2}$) là:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y=\frac{-x}{(2x_0+3)^2}+\frac{2x_0^2+8x_0+6}{(2x_0+3)^2}$$

Do đó tiếp tuyến cắt Ox tại A($2x_0^2+8x_0+6$;0)

và cắt Oy tại B(0; $\dfrac{2x_0^2+8x_0+6}{(2x_0+3)^2}$)

Tam giác OAB cân tại O $\Leftrightarrow$ OA = OB (với OA > 0)

$$\Leftrightarrow |x_A|=|y_B| \Leftrightarrow \left|2x_0^2+8x_0+6\right|=\left|\frac{2x_0^2+8x_0+6}{(2x_0+3)^2}\right|$$

$$\Leftrightarrow (2x_0+3)^2=1 \Leftrightarrow 2x_0+3=\pm1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-1\,(L) \\ x_0=-2\,(TM) \end{array}\right.$$

Với $x_0=-2$ ta có tiếp tuyến $y=-x-2$

Câu II.

1. ĐKXĐ: $\begin{cases} \sin x \neq -\frac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x \neq \frac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow$ cosx - 2sinxcosx = $\sqrt{3}$ (1 – sinx + 2sinx – 2sin^{2}x)

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} + \sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x)$$

$$= \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{5\pi}{6} + \cos x.\sin\frac{5\pi}{6} = \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2x.\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{5\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{3} + m2\pi \\ x + \frac{5\pi}{6} = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + n2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp với đkxđ ta có họ nghiệm của pt l à:

$$x = -\frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3} \ (n \in ¢)$$

2. Đkxđ: $6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$ (*)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x-2} \\ v = \sqrt{6-5x} \end{cases}$ $(v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} u^3 = 3x - 2 \\ v^2 = 6 - 5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{8-2u}{3} \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases}$

$$\Rightarrow 15u^3 + 64 - 32u + 4u^2 - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -2 \\ 15u^2 - 26u + 20 = 0 \quad \text{vô n}_0 \text{ do } \Delta' = 13^2 - 15.20 < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow u = -2 \Rightarrow x = -2\,(\text{tm}).$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là S={-2}

Câu III.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx$$

Ta có: $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x).dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Mặt khác xét $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x.\cos x.dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \left(\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

Câu IV.

Vì (SBI)và (SCI)vuông góc với (ABCD) nên $SI \perp (ABCD)$.

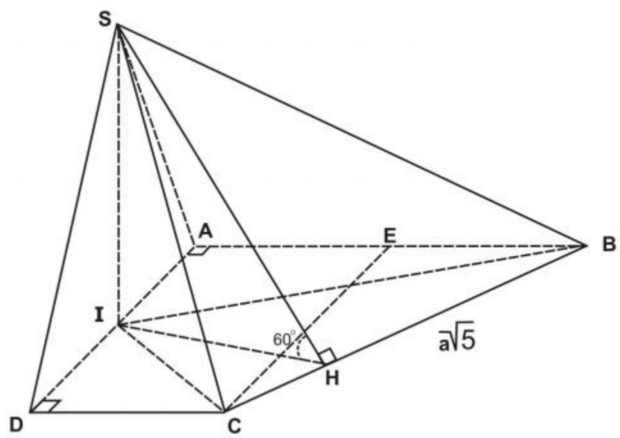
Ta có $IB = a\sqrt{5}; BC = a\sqrt{5}; IC = a\sqrt{2};$

Hạ $IH \perp BC$ tính được $IH = \frac{3a\sqrt{5}}{5}$;

Trong tam giác vuông SIH có $SI = IH \ \tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

$S_{ABCD} = S_{AECD} + S_{EBC} = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ (E là trung điểm của AB).

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}SI = \frac{1}{3}3a^2\frac{3a\sqrt{15}}{5} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.



Câu V.

Từ giả thiết ta có:

$x^2 + xy + xz = 3yz \Leftrightarrow (x + y)(x + z) = 4yz$

Đặt $a = x + y$ và $b = x + z$

Ta có: $(a - b)^2 = (y - z)^2$ và $ab = 4yz$

Mặt khác

$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b)^2$

$$\le \sqrt{2(a^2+b^2)}\left[(a-b)^2+ab\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(a-b)^2+2ab\right]}\left[(a-b)^2+ab\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(y-z)^2+2yz\right]}\left[(y-z)^2+4yz\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(y+z)^2+4yz\right]}\,(y+z)^2$$

$$\le \sqrt{4(y+z)^2}\,(y+z)^2 = 2(y+z)^2 \quad (1)$$

Ta lại có:

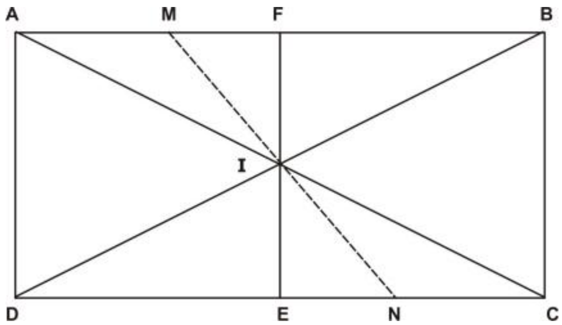
$3(x + y)(y + z)(z + x) = 12yz(y + z)$

$\le 3(y + z)^2 \,.\, (y + z) = 3(y + z)^3 \qquad (2)$

Cộng từng vế (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

Câu VI .a

1. Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, F là điểm đối xứng vơi E qua I.



Ta có $N \in DC$, $F \in AB$, $IE \perp NE$.

Tính được $N = (11; -1)$.

Giả sử $E = (x; y)$, ta có:

$\overrightarrow{IE} = (x - 6; y - 2)$; $\overrightarrow{NE} = (x - 11; y + 1)$.

$\overrightarrow{IE} . \overrightarrow{NE} = x^2 - 17x + 66 + y^2 - y - 2 = 0$ (1)

$E \in \Delta \Rightarrow x + y - 5 = 0$. (2)

Giải hệ (1), (2) tìm được $x_1 = 7$; $x_2 = 6$.

Tương ứng có $y_1 = -2$; $y_2 = -1 \Rightarrow E_1 = (7; -2)$; $E_2 = (6; -1)$

Suy ra $F_1 = (5; 6)$, $F_2 = (6; 5)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng AB là $x - 4y + 19 = 0$ hoặc $y = 5$.

2. Mặt cầu có tâm I(1;2;3) bán kính R=5

Khoảng cách từ tâm I đến mp (P) là

$$d(I;(P)) = \frac{|2.1 - 2.2 - 3 - 4|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} = 3 .$$

Vì d(I;(P)) <R nên (P) cắt (S) theo đường tròn.

Gọi H là hình chiếu của I trên (P) thì H là giao của mp(P) với đường thẳng qua I, vuông góc với (P). Dễ dàng tìm được H= (3;0;2).

Bán kính đường tròn là: $\sqrt{R^2 - IH^2} = 4$.

Câu VII. a

Phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - 10 = -9 = (3i)^2$

nên phương trình có hai nghiệm là:

$z_1 = -1 - 3i$ và $z_2 = -1 + 3i$

Suy ra $\begin{cases} |z_1|^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 10 \\ |z_2|^2 = (-1)^2 + (3)^2 = 10 \end{cases}$

Vậy A = $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 10 + 10 = 20$

Chương trình nâng cao

Câu VI. b

1. $(C):(x+2)^2+(y+2)^2=(\sqrt{2})^2$

Đường tròn (C) có tâm I(-2;-2); bán kính $R=\sqrt{2}$

$\Delta: x+my-2m+3=0$

Gọi H là hình chiếu của I trên Δ.

- Để Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B phân biệt thì: IH<R
- Khi đó $S_{\Delta IAB}=\frac{1}{2}IH.AB=IH.HA\le\frac{IH^2+HA^2}{2}=\frac{IA^2}{2}=\frac{R^2}{2}=1$

$\Rightarrow \left(S_{\Delta IAB}\right)_{max}=1$ khi $IH=HA=1$ (hiển nhiên IH < R)

$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \Leftrightarrow |1-4m|=\sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 1-8m+16m^2=m^2+1$

$\Leftrightarrow 15m^2-8m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{8}{15} \end{array}\right.$

Vậy, có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là: m = 0 và m = $\frac{8}{15}$

2. Giả sử M(a;b;c) là điểm cần tìm.

- Vì $M\in\Delta_1$ nên: $\frac{a+1}{1}=\frac{b}{1}=\frac{c+9}{6}\Rightarrow\begin{cases} a=b-1 \\ c=6b-9 \end{cases}$
- Khoảng cách từ M đến mp (P) là:

$$d=d(M;(P))=\frac{|a-2b+2c-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{|11b-20|}{3}$$

- Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với Δ_2, ta có:

$\vec{n}_{(Q)}=\vec{u}_{\Delta_2}=(2;1;-2)$

$\Rightarrow (Q): 2(x-a)+1(y-b)-2(z-c)=0$

Hay (Q): $2x+y-2z+9b-16=0$

Gọi H là giao điểm của (Q) và $\Delta_2 \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hpt:

$$\begin{cases} 2x + y - 2z + 9b - 16 = 0 \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-2} \end{cases}$$

$\rightarrow H(-2b+3;-b+4;2b-3)$

$\rightarrow MH^2 = (3b-4)^2 + (2b-4)^2 + (4b-6)^2 = 29b^2 - 88b + 68$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$$MH^2 = d^2$$

$$\Leftrightarrow 29b^2 - 88b + 68 = \frac{(11b-20)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 261b^2 - 792b + 612 = 121b^2 - 440b + 400$$

$$\Leftrightarrow 140b^2 - 352b + 212 = 0$$

$$\Leftrightarrow 35b^2 - 88b + 53 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = \dfrac{53}{35} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm thoả mãn là: M(0;1;-3) và $M\left(\dfrac{18}{35};\dfrac{53}{35};\dfrac{3}{35}\right)$

Câu VII b.

Điều kiện $\begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad xy > 0$

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = \log_2(2xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y) \in \{(2;2);(-2;-2)\} : \text{thỏa mãn}$$

Nhóm chuyên gia giải đề:

TS. Lê Thống Nhất, ThS Đặng Văn Quản, ThS Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hảo

Đề thi do các chuyên gia của cổng luyện thi trực tuyến abcdonline.vn giải.
Xem chi tiet tai: http://web.abcdonline.vn/dapandethi/10_mon-toan-khoi-a.abcd)
TS. Lê Thống Nhất, ThS Đặng Văn Quản, ThS Nguyễn Xuân Bình, ThS Hoàng Trọng Hảo.